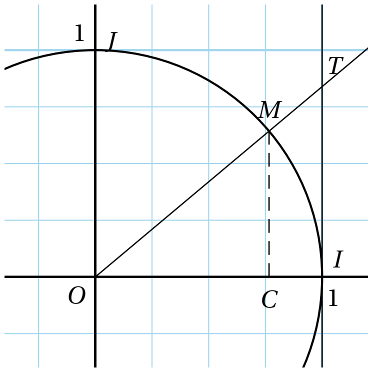
Démonstration des dérivées des fonctions trigonométriques

Terminale spé M5, 2021-2022

EXERCICE 1. Dans un repère orthonormé $(O\,;\,I,\ J)$, on considère un point M sur le cercle trigonométrique de centre O tel que $\left(\overrightarrow{OI}\,;\,\overrightarrow{OM}\right) = x$ avec $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.
On définit aussi C le projeté orthogonal de M sur (OI) et T l'intersection de (OM) et de la perpendiculaire à (OI) passant par I.



① Exprimer en fonction de x les aires du secteur angulaire du cercle trigonométrique d'angle $\widehat{MOI}$ et des triangles MOI et TOI.

② En déduire que, pour tout $x \in \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$:

- ⋆ $\sin x < x < \tan x$
- ⋆ $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$

③ Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\sin x}{x}$.

④ Montrer que pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\,0\right[\cup \left]0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{1+\cos x}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2.$$

En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ puis $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$.

⑤ Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$ fixé, calculer $\cos' x_0$ et $\sin' x_0$ (on pourra utiliser les formules trigonométriques de duplication et les limites obtenues précédemment).